

文章编号: 1000-5013(2008)01-0084-04

# 饱和土体中稳态渗流的高效无网格分析

李 凌, 王东东

(厦门大学 建筑与土木工程学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 利用稳定节点积分思想, 构造一种求解饱和土体中稳态渗流问题的快速 Galerkin 无网格方法. 该方法通过建立非局部光滑节点水力梯度, 具有节点积分高效的特点, 同时避免形函数在节点上直接求导, 为稳态渗流分析提供有效的稳定保障. 均匀渗流与自由面渗流算例的计算结果表明, 该方法分析渗流问题高效且准确, 能精确模拟任意均匀渗流场, 在求解自由面迭代问题时, 能避免有限元求解迭代问题时重划网格的工作, 迭代收敛速度快.

**关键词:** 稳态渗流; Galerkin 无网格法; 稳定节点积分; 饱和土体

**中图分类号:** TV 139.14; TD 824.7<sup>+</sup> 1

**文献标识码:** A

渗流分析是土体稳定性分析中的一个重要部分<sup>[1]</sup>, 解析渗流计算受限于简单的几何形状和均质材料, 因此渗流分析大多采用有限元法 (FEM). 近年来, 无网格法在解决大变形问题方面得到了快速发展, 出现了各种各样的无网格法<sup>[2-5]</sup>. 所有无网格法一个共性特征是仅通过节点信息来建立近似函数, 即对未知基本变量的近似不依赖于节点之间的有序连接. 为了在稳定的前提下提高计算效率, Chen 等<sup>[6]</sup>提出了稳定节点积分方法 (Stabilized Conforming Nodal Integration, SCNI). 文[7-10]进一步推导建立了梁板壳等结构问题无网格分析的稳定节点积分无网格法. 本文在此基础上, 进一步将稳定节点方法推广到饱和土体中的稳态渗流分析, 构造一种快速稳定的用于稳态渗流分析的高效无网格法.

## 1 渗流问题的无网格近似

无网格离散及矩形节点支撑域示意图, 如图 1 所示. 考虑到其平面区域  $\Omega \in \mathbf{R}^2$ , 边界  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ ,  $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset$  其稳态达西渗流问题控制方程为<sup>[1]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \nabla v &= 0 \quad \text{in } \Omega; & v &= -\mathbf{D} \cdot \nabla \varphi \\ \varphi &= g \quad \text{on } \Gamma_g; & -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= h \quad \text{on } \Gamma_h \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中,  $\varphi$  为渗流水头函数;  $\mathbf{v}$  为渗流速度,  $\mathbf{v} = -\mathbf{D} \nabla \varphi$ ;  $\mathbf{n}$  为自然边

界  $\Gamma_h$  的外法线方向;  $\mathbf{D}$  为达西渗透系数矩阵,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$ . 其中,

$k_x, k_y$  分别为  $x, y$  方向的渗透系数. 问题的等效积分弱形式为

$$\left. \begin{aligned} \delta \Pi(\varphi) &= \int_{\Omega} \delta \varphi_{,i} D_{ij} \varphi_{,j} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \delta \varphi h d\Gamma = 0, \\ \varphi &= g \quad \text{on } \Gamma_g. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

根据移动最小二乘 (MLS) 或再生核 (RK) 无网格近似理论<sup>[2,6]</sup>, 问题区域  $\Omega$  被离散为一组节点  $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I)$ ,  $I = 1, 2, \dots, NP$ , 相应的无网格水头近似可表示为

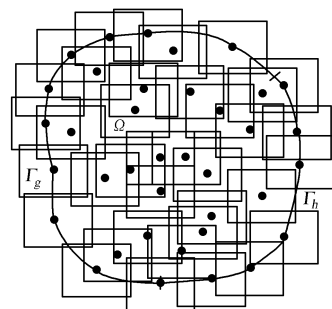


图 1 无网格离散及矩形节点支撑域

Fig. 1 Meshfree discretization and rectangular nodal support

收稿日期: 2007-12-12

作者简介: 李 凌 (1984-), 男; 通讯作者: 王东东 (1974-), 男, 副教授, 主要从事结构仿真分析研究. E-mail: ddwang@xmu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目 (D0710023)

$$\varphi^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I, \quad \Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \omega_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I).$$

(3)

式(3)中,  $NP$  为节点数,  $\Psi_I$  为节点形函数,  $d_I$  为节点系数,  $\omega_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) = \omega_x(x - x_I) \omega_y(y - y_I)$  为定义在矩形支撑域内的双向三阶样条核函数<sup>[2]</sup>,  $\alpha_x = |x - x_I|/s_x^{\max}$  和  $\alpha_y = |y - y_I|/s_y^{\max}$  为节点支撑域系数,  $s_x^{\max}$  与  $s_y^{\max}$  分别是  $x_I$  与相邻节点之间  $x, y$  方向最远的距离.  $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$  为未知系数向量, 而

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) = \{1, x - x_I, y - y_I, (x - x_I)^2, \dots, (y - y_I)^n\}^T$$

(4)

为单项式基向量, 系数向量  $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$  可通过施加  $n$  阶再生条件来求解. 即

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) x^i y^j = x^i y^j, \quad 0 \leq i + j \leq n, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

(5)

将形函数式(3)代入式(5), 变换可以得  $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{p}(\boldsymbol{0})$  及形函数  $\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{0}) \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) \omega_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)$ .

图 2 所示为一典型无网格节点形函数. 注意到形函数不是插值函数, 强制边界条件不能像有限元一样直接施加, 本文采用混合变换法来施加强制边界条件<sup>[6]</sup>. 将无网格离散代入弱形式, 可得离散平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{K} \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{K} = \sum_{I,J=1}^{NP} \boldsymbol{A}_{IJ} \boldsymbol{K}_{IJ}, \\ \boldsymbol{f} &= \sum_{I=1}^{NH} \boldsymbol{A}_I \boldsymbol{f}_I, \quad \boldsymbol{K}_{IJ}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J \mathrm{d}\Omega, \\ \boldsymbol{f}_I &= \int_{\Gamma_h} \Psi_I h \mathrm{d}\Gamma, \quad \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x}(\boldsymbol{x}) \\ \Psi_{I,y}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

(6)

式(6)中,  $\boldsymbol{A}$  为整体组装算子,  $NH$  为自然边界上的节点数.

## 2 稳定节点积分方法及光滑水力梯度

在计算式引用式(6)中的刚度矩阵时不可避免要遇到区域积分, 所以尽管无网格近似不需要网格, 仍需要背景网格来进行数值积分, 只是背景网格的作用和有限元网格相比是不同的. 由于无网格形函数不是低阶多项式, 背景网格积分通常采用高阶高斯积分, 大大降低了计算效率. 本文采用光滑稳定节点积分(SCNI)来进行区域积分. 其基本原理是将节点梯度进行光滑平均处理, 然后应用光滑节点梯度离散弱形式形成刚度矩阵. 无网格离散节点及节点代表区域, 如图 3 所示. 它们可以通过 voronoi 离散得到, 其中某一节点  $\boldsymbol{x}_L$  的代表域为  $\Omega_L$ , 边界为  $\Gamma_L$ . 此节点的光滑水力梯度可以构造为<sup>[6-10]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_{,i}^h(\boldsymbol{x}_L) &= \frac{1}{A_L} \int_{\Omega_L} \bar{\varphi}_{,i}^h(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \varphi^h(\boldsymbol{x}) n_i^L(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma = \sum_{I=1}^{NP} \nabla_i \Psi_I(\boldsymbol{x}_L) d_I, \\ \nabla_i \Psi_I(\boldsymbol{x}_L) &= \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \Psi_I(\boldsymbol{x}) n_i^L(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \right\}$$

(7)

上式中,  $A_L$  为  $\Omega_L$  的面积,  $\boldsymbol{n}^L$  为  $\Gamma_L$  的外法线方向. 采用光滑水力梯度对弱形式(2)进行离散, 可以得到稳定节点积分刚度矩阵为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{K}_{IJ} &= \sum_{L=1}^{NP} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T(\boldsymbol{x}_L) \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_J(\boldsymbol{x}_L) A_L, \\ \bar{\boldsymbol{B}}_I(\boldsymbol{x}_L) &= \begin{bmatrix} \nabla_x \Psi_I(\boldsymbol{x}_L) \\ \nabla_y \Psi_I(\boldsymbol{x}_L) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

(8)

可见, 采用节点光滑梯度有效避免了求解形函数的导数. 另外, 可以证明若无网格近似采用线性或更高阶的基函数, 式(8)的构造满足下式线性准确积分约束<sup>[6]</sup>, 即

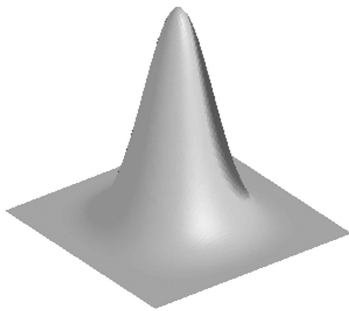


图 2 MLS/RK 形函数  
Fig. 2 MLS/RK shape function

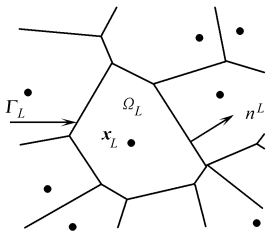


图 3 节点代表域示意图  
Fig. 3 Nodal representative domain of node  $\boldsymbol{x}_L$

$$\int_{\Omega} \nabla_i \Psi_l d\Omega = \int_{\Gamma_h} \Psi_l n_i d\Gamma.$$

(9)

因此,对于任意线性解(对应均匀渗流的情况),这里所述基于稳定节点积分的无网格方法(MF-SCNI)都能够得到准确解,而且与节点分布情况无关.

### 3 数值算例

#### 3.1 稳态均匀渗流问题

图 4 为  $8\text{ m} \times 8\text{ m}$  的正方形区域的稳态均匀渗流无网格离散,其水头函数  $\varphi(\mathbf{x}) = 2x + y$ ,两方向渗透系数都取  $1\text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ .图 4 中,实线所围成的区域表示每个节点的稳定积分代表区域.计算中采用线性基函数,四周边界条件按照给定  $\varphi(\mathbf{x})$  施加,节点支撑域系数取为 2.采用稳定节点积分无网格法得到的水头和流线结果,如图 5 所示.可见,该方法可以准确求解均匀渗流问题.

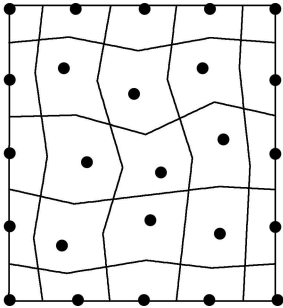
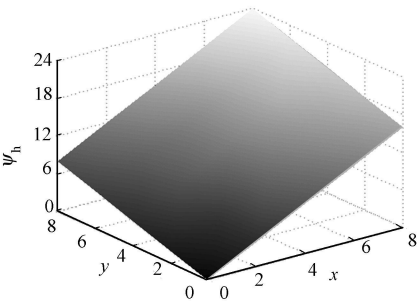
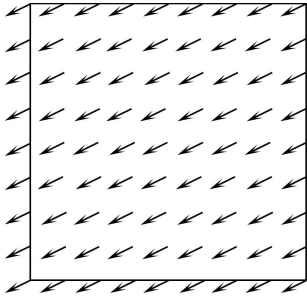


图 4 稳态均匀渗流问题的无网格离散  
Fig.4 Meshfree discretization for uniform  
steady seepage problem



(a) 水头解



(b) 流线分布图

图 5 稳定节点积分 MF-SCNI 结果  
Fig.5 MF-SCNI solutions

#### 3.2 自由面渗流问题

图 6 为尺寸  $4\text{ m} \times 6\text{ m}$  的不透水地基上矩形均质土体的初始无网格离散.由于渗流自由面的位置是预先未知的,必须进行迭代求解.其基本求解方法是,首先假定一初始自由面确定计算区域,对区域进行离散.在求出自由面节点的水头后,再校核其是否满足自由水面水头条件  $\varphi(\mathbf{x}) = y$ .如不满足,则将求得的水头值作为渗流自由面节点的  $y$  坐标,形成新的计算区域,进行迭代计算,直至渗流自由面节点满足  $\varphi(\mathbf{x}) = y$ .最后得到的水头分布就是自由表面浸润线.计算中采用线性基函数,两方向渗透系数均取  $1\text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ ,节点支撑域系数取为 2,节点 4 的迭代控制精度选为  $\varepsilon = 0.001$ ,迭代 5 次后结果稳定.图 7 为稳定节点积分无网格法的水头和流线结果.

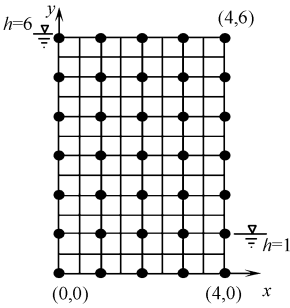
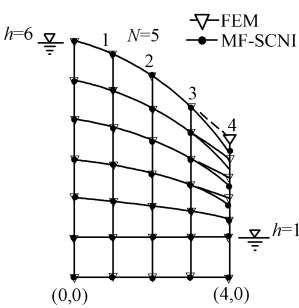
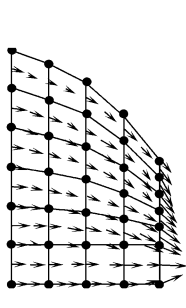


图 6 渗流自由面问题初始计算  
区域与无网格离散

Fig.6 Initial domain discretization for  
free surface steady seepage problem



(a) 水头解



(b) 流线分布图

图 7 MF-SCNI 迭代 5 次结果  
Fig.7 MF-SCNI solutions  
after 5 iterations

果.图 7 和表 1 分别列出了四边形线性有限元结果的对比分析.

从上述对比可以得出,稳定节点积分无网格法与有限元法相比,具有精度高、收敛速度快的优点,并且迭代时可以有效地避免有限元法中重分网格的工作,调整节点方便,能很好地避免网格奇异带来的问题.用 MF-SCNI 求某一断面的流量也要比有限元法来得方便灵活.

表 1 有限元法及 MF-SCNI 与甘油模型结果对比  
Tab.1 Comparison of between the numerical (FEM,  
MF-SCNI) and analytical (Glycerin model) results

模型	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
有限元	5.67	5.19	4.37	3.52
MF-SCNI	5.65	5.19	4.35	3.17
甘油模型 <sup>[1]</sup>	5.63	5.10	4.38	3.25

## 4 结束语

基于稳定节点积分方法, 建立用于土体中稳态渗流分析的 Galerkin 高效无网格方法. 该方法利用光滑水力梯度和节点积分离散渗流问题的 Galerkin 弱形式, 所构造的节点光滑水力梯度不仅具有节点积分效率高的优点, 还能满足数值算法稳定性的要求. 利用节点光滑水力梯度导出的无网格离散方程满足线性(均匀渗流)准确性条件, 具有高效、稳定和准确的特点. 把基于稳定节点积分无网格法应用于非稳态渗流场和土体应力变形的耦合计算, 进行土坡稳定性分析将是下一步研究的课题.

### 参考文献:

- [1] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [2] LI S, LIU W K. Meshfree and particle methods and their applications[J]. Applied Mechanics Review, 2002, 55(1): 1-34.
- [3] 王东东. 边坡大变形损伤破坏的高效无网格模拟[J]. 岩土力学, 2007, (S1), 348-353.
- [4] 曾清红, 卢德唐, 齐 岩, 等. 无网格方法求解稳定渗流问题[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 440-445.
- [5] 葛锦宏, 李广信, 介玉新. 无单元法在有自由面渗流计算中的应用[J]. 计算力学学报, 2003, 20(2): 142-144.
- [6] CHEN J S, WU C T, YOON S, YOU Y. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(2): 435-466.
- [7] WANG Dong-dong, CHEN J S. Locking free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner plate formulation[J]. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12-14): 1065-1083.
- [8] WANG Dong-dong, DONG S B, CHEN J S. Extended meshfree analysis of transverse and inplane loading of a laminated anisotropic plate of general planform geometry[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(1): 144-171.
- [9] WANG Dong-dong, CHEN J S. A locking-free meshfree curved beam formulation with the stabilized conforming nodal integration[J]. Computational Mechanics, 2006, 39(1): 83-90.
- [10] CHEN J S, WANG Dong-dong. A constrained reproducing kernel particle formulation for shear deformable shell in Cartesian coordinates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 68(2): 151-172.

## An Efficient Meshfree Method for Steady Seepage Analysis in Saturated Soils

LI Ling, WANG Dong-dong

(School of Architecture and Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** An efficient Galerkin meshfree method using the technique of stabilized conforming nodal integration is presented for the steady Darcy seepage analysis in saturated soil media. In this method, the seepage stiffness is integrated nodally with a smoothed nodal hydraulic gradient. This smoothed gradient is obtained as a volume average of the hydraulic gradient in the associated nodal representative domain. No derivatives of the meshfree shape functions are involved in the whole computation process. It turns out that, this method exactly meets the integration constraint for linear exactness, which corresponds to the requirement to reproduce the solution of uniform seepage problems regardless of meshfree discretization patterns. Both computational efficiency and stability are achieved. Two case numerical tests, the uniform seepage problem and the free surface seepage problem, demonstrated that the present method is very accurate and also fast convergent.

**Keywords:** steady seepage; Galerkin meshfree method; stabilized conforming nodal integration; saturated soils

(责任编辑: 黄仲一)